



Mo Tu We Th Fr Sa Su

Meme No. _____

Date / /

حل تمرینات فصل اول

1- توابع داده شده حل معادله دیفرانسیلی مربوطه را تشکیل میدهند یا خیر؟

a) $y = 5x^2$, $xy' = 2y$

$y' = 10x$, $x \cdot 10x = 2 \cdot 5x^2 \Rightarrow \boxed{10x^2 = 10x^2}$ ✓ می

b) $y = \frac{c-x^2}{2x}$, $(x+y)dx + xdy = 0$

$y' = \frac{-2x \cdot 2x - (c-x^2) \cdot 2}{4x^2} = \frac{-4x^2 - 2c + 2x^2}{4x^2} = \frac{-x^2 - c}{2x^2} \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{(x+c)}{2x^2}}$

$(x+y)dx + xdy = 0 \Rightarrow \frac{x+y}{x} + \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{x+y}{x} + y' = 0 \Rightarrow \frac{x + \frac{(c-x^2)}{2x}}{x} - \frac{x+c}{2x^2} = 0$

$\frac{x^2+c}{2x^2} - \frac{x+c}{2x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{0=0}$ ✓ می

c) $y = 3\sin x - 4\cos x$, $y'' + y = 0$

$y' = 3\cos x + 4\sin x$, $-3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x = 0$

$y'' = -3\sin x + 4\cos x$, $\boxed{0=0}$ ✓ می

d) $y = x e^x$, $y'' - 2y' + y = 0$

$y' = e^x + x e^x$

$y'' = e^x + e^x + x e^x$

$y'' = 2e^x + x e^x$

$2e^x + x e^x - 2e^x - 2x e^x + x e^x = 0$

$\boxed{0=0}$ ✓ می



Meme No. _____

Date / /

Mo Tu We Th Fr Sa Su

$$e) y = \sin x, \quad y'' + y = 0$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$-\cancel{\sin x} + \cancel{\sin x} = 0$$

$$\boxed{0 = 0} \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

$$f) y = \sqrt{1-x^2}, \quad yy' + x = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cancel{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} + x = 0$$

$$\boxed{0 = 0} \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

2 - معادلات دیفرانسیلی را تشکیل دهید که توابع داده شده ذیل حل عمومی آنها نباشد.

$$a) x^2 - xy + y^2 = c^2$$

$$2x - (y + xy') + 2yy' = 0$$

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0$$

$$y'(2y - x) = y - 2x \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y - 2x}{2y - x}}$$

$$b) y = x + ce^y$$

$$y' = 1 + ce^y \cdot y'$$

$$y - x = ce^y \quad \dots \text{I}$$

$$y' - 1 = ce^y y' \quad \dots \text{II}$$

$$\frac{y - x}{y' - 1} = \frac{1}{y'}$$

$$yy' - xy' = y' - 1$$

$$yy' - y' = xy' - 1$$

$$y'(y - 1 - x) = -1$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{x - y + 1}}$$



Mo Tu We Th Fr Sa Su

Meme No. _____

Date / /

c) $x^2 + y^2 = c$

$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow \boxed{x + yy' = 0}$

d) $y = \frac{c_1}{x} + c_2 x \dots I$

$y' = -\frac{c_1}{x^2} + c_2 \dots II$

$y'' = \frac{2c_1}{x^3} \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{x^3 y''}{2}}$

قیمت c_1 را در رابطه I، وضع میکنیم.

$y = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3 y''}{2} + c_2 x \dots I$

$y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3 y''}{2} + c_2 \dots II$

$y = \frac{x^2 y''}{2} + c_2 x$

$y' = -\frac{x y''}{2} + c_2$

$2y = x^2 y'' + 2c_2 x$

$2y' = -x y'' + 2c_2$

$2y - x^2 y'' = 2c_2 x \dots III$

$2y' + x y'' = 2c_2 \dots IV$

رابطه III، IV، طرف به طرف تقسیم میکنیم.

$\frac{2y - x^2 y''}{2y' + x y''} = \frac{2c_2 x}{2c_2} \Rightarrow 2y - x^2 y'' = 2x y' + x^2 y''$

$2y - 2x^2 y'' - 2x y' = 0 \Rightarrow \boxed{-y + x^2 y'' + x y' = 0}$

e) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \dots I$

$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x} \dots II$

$y'' = 4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x} \dots III$

$4y = 4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x} \dots I$

$-y'' = -4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{-2x} \dots III$

$4y - y'' = 0$

$\boxed{y'' - 4y = 0}$

رابطه I، III، را افتاد میکنیم.



Mo Tu We Th Fr Sa Su

Meme No. _____

Date / /

$$f) y = c_1 x + c_2 x^2 \dots I$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x \dots II$$

$$y'' = 2c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{y''}{2}}$$

قیمت c_2 را در رابطہ I و II و در معادله درجیم:

$$y = c_1 x + \frac{y''}{2} x^2 \dots I \quad \left\{ \quad y' = c_1 + 2 \frac{y''}{2} x \dots II \right.$$

$$2y - x^2 y'' = 2c_1 x \dots I \quad \left\{ \quad y' - x y'' = c_1 \dots II \right.$$

رابطه I و II را طرف به طرف تقسیم میکنیم.

$$\frac{2y - x^2 y''}{y' - x y''} = \frac{2c_1 x}{c_1} \Rightarrow 2y - x^2 y'' = 2x y' - 2x^2 y'' \Rightarrow \boxed{x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0}$$

$$g) y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} \dots I$$

$$y' = c_2 e^{-x} - (c_1 + c_2 x) e^{-x} \dots II$$

$$y'' = -c_2 e^{-x} - [c_2 e^{-x} - (c_1 + c_2 x) e^{-x}]$$

$$y'' = -2c_2 e^{-x} + (c_1 + c_2 x) e^{-x} \dots III$$

رابطه I و III را تفاضل میکنیم.

$$y - y'' = 2c_2 e^{-x} \dots IV$$

رابطه II و III را تفاضل میکنیم.

$$y' + y'' = -c_2 e^{-x} \dots V$$

$$\frac{y - y''}{y' + y''} = \frac{2c_2 e^{-x}}{-c_2 e^{-x}} \Rightarrow y - y'' = -2y' - 2y'' \Rightarrow \boxed{y'' + 2y' + y = 0}$$



$$h) \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \quad \dots I$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} \quad \dots II$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \quad \dots III$$

رابطه I و II را اضافه میکنیم.

$$y + y' = 3C_1 e^{2x} \quad \dots IV$$

رابطه I و III را اضافه میکنیم.

$$y - y'' = -3C_1 e^{2x} \quad \dots V$$

$$\frac{y + y'}{y - y''} = \frac{3C_1 e^{2x}}{-3C_1 e^{2x}} \Rightarrow y + y' = -y + y'' \Rightarrow \boxed{y'' - y' - 2y = 0}$$

$$i) \quad y = \sin(x+c) \quad \dots I$$

$$y' = \cos(x+c) \quad \dots II$$

اطراف رابطه I و II را مربع نموده و طرف به طرف جمع میکنیم.

$$y^2 = \sin^2(x+c) \quad \left| \quad y^2 + y'^2 = \sin^2(x+c) + \cos^2(x+c) \right.$$

$$y'^2 = \cos^2(x+c) \quad \left| \quad \boxed{y^2 + y'^2 = 1} \right.$$

$$j) \quad cy = \sin cx \quad \dots I$$

$$cy' = c \cdot \cos cx$$

$$y' = \cos cx \quad \dots II$$

تحت c را از رابطه I در رابطه II نموده و در رابطه II وضع میکنیم.

$$c = \frac{\sin cx}{y} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 cx}}{y} = \frac{\sqrt{1 - y'^2}}{y}$$

$$y' = \cos \left(\frac{\sqrt{1 - y'^2}}{y} \cdot x \right)$$

$$\boxed{y = \cos \left(\frac{x \sqrt{1 - y'^2}}{y} \right)}$$



Mo Tu We Th Fr Sa Su

Meme No. _____

Date / /

K) $y = ax^3 + bx^2 + cx \dots I$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c \dots II$

$y'' = 6ax + 2b \dots III$

$y''' = 6a \Rightarrow a = \frac{y'''}{6}$

$y'' = 6 \cdot \frac{y'''}{6} x + 2b \dots II$

$y'' = xy''' + 2b \Rightarrow b = \frac{y'' - xy'''}{2}$

حال قيمت a ، b ، c ، I ، II ، III وضع كن.

$y' = 3 \cdot \frac{y'''}{6} x^2 + x \left(\frac{y'' - xy'''}{2} \right) + c$

$y' = \frac{1}{2} x^2 y''' + y'' - xy''' + c$

$y' - \frac{1}{2} x^2 y''' - y'' + xy''' = c$

قيمت a ، b ، c ، I ، II ، III وضع كن.

$y = \frac{y'''}{6} x^3 + \left(\frac{y'' - xy'''}{2} \right) x^2 + \left(y' - \frac{xy'''}{2} - xy'' + xy''' \right) x$

$y = \frac{x^3 y'''}{6} + \frac{x^2 y''}{2} - \frac{x^3 y'''}{2} + xy' - \frac{x^3 y'''}{2} - xy'' + xy'''$

$y = \frac{x^3 y'''}{6} - \frac{x^2 y''}{2} + xy'$

$y = \frac{x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y}{6}$

$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$

L) $y = ax^2 + be^x \dots I$

$y' = 2ax + be^x \dots II$

$y'' = 2a + be^x \dots III$

ابط I ، II ، III وضع كن.

$y - y' = ax^2 - 2ax$

$y - y' = a(x^2 - 2x) \dots IV$

ابط II ، III ، IV وضع كن.

$y' - y'' = 2ax - 2a$

$y' - y'' = a(2x - 2) \dots V$

ابط IV ، V ، VI وضع كن.

$\frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{x(x - 2)}{x(2x - 2)}$

$(y - y')(2x - 2) = (x^2 - 2x)(y' - y'')$

$2xy - 2y - 2xy' + 2y' = x^2 y' - x^2 y'' - 2xy' + 2xy''$

$(2x - 2)y - (2 - x^2)y' + (x^2 - 2x)y'' = 0$

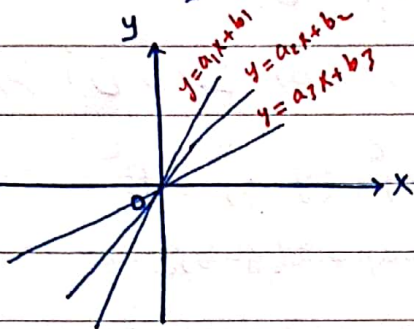


Mo Tu We Th Fr Sa Su

Meme No. _____

Date / /

3- معادله دینفرانسیبی تمام مستقیم ها در مختصات xoy را در y به

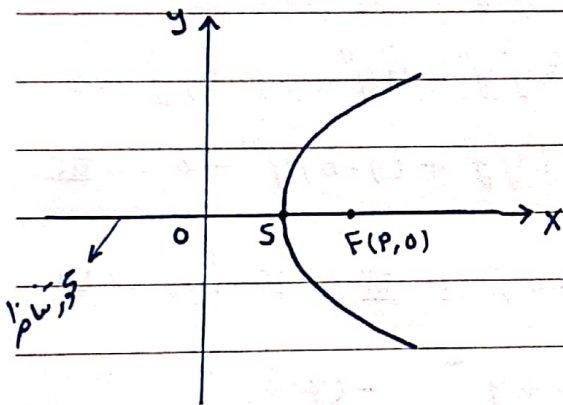


$$y = ax + b$$

$$y' = a$$

$$y'' = 0$$

4- معادله دینفرانسیبی تمام پارابول ها که محور تناظر آنها محور Ox است، در y به



$$y^2 = 4p(x - h)$$

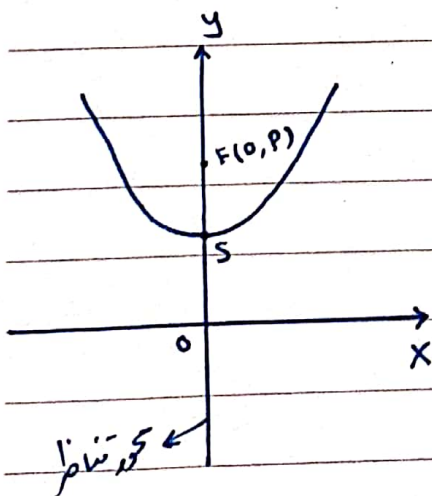
$$2yy' = 4p$$

$$yy' = 2p$$

$$y'y' + yy'' = 0$$

$$y'^2 + yy'' = 0$$

5- معادله دینفرانسیبی تمام پارابول ها که محور تناظر آنها محور Oy است، در x به



$$x^2 = 4p(y - k)$$

$$2x = 4py' \dots I$$

$$x = 2py'$$

$$1 = 2py'' \dots II$$

از I و II، از طرف به طرف تقسیم میکنیم

$$\frac{x}{1} = \frac{2py'}{2py''} \Rightarrow xy'' - y' = 0$$



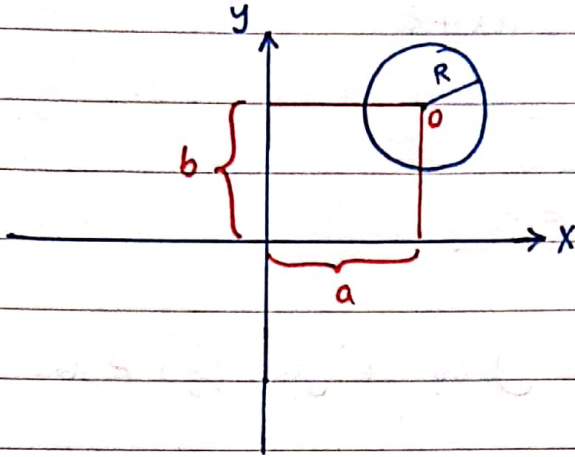
Mo Tu We Th Fr Sa Su

Meme No. _____

Date / /

6- معادله دیفرانسیلی تمام دایره در مستوی xOy را باید که شعاع آن R و

مرکز آن در نقطه (a, b) است.



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$$

$$(x-a) + (y-b)y' = 0 \dots I$$

$$1 + y' \cdot y' + (y-b)y'' = 0$$

$$1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0 \dots II$$

$$2y'y'' + y'y''' + (y-b)y''' = 0$$

$$3y'y'' + (y-b)y''' = 0 \dots III$$

حالا از رابطه II و III پارامتر b را حذف نموده و معادله دیفرانسیلی را بدست می آوریم.

$$1 + y'^2 = -(y-b)y'' \dots II$$

$$3y'y'' = -(y-b)y''' \dots III$$

$$\Rightarrow \frac{1 + y'^2}{3y'y''} = \frac{-(y-b)y''}{-(y-b)y''}$$

$$y''' + y'^2 y''' = 3y'y''^2 \Rightarrow \boxed{y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0}$$



Mo Tu We Th Fr Sa Su

Meme No. _____

Date / /

8 - حل عمومی معادلات دیفرانسیلی ذیل را درآید؟

a) $y' = \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \Rightarrow dy = \cos x dx \Rightarrow \boxed{y = \sin x + c}$$

b) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow dy = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \Rightarrow \boxed{y = \ln |x^2 + 1| + c}$$

c) $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right]$$

$$y = \int \frac{2t dt}{1 + t} \Rightarrow y = 2 \int \frac{t + 1 - 1}{t + 1} dt \Rightarrow y = 2t - 2 \ln |t + 1| + c$$

$$\boxed{y = 2\sqrt{x} - 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + c}$$

d) $y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow \boxed{y = \arcsin \frac{x}{2} + c}$$



Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

Meme No. _____

Date

/

/

$$e) y' = \frac{\ln x}{x}$$

$$dy = \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow y = \int \ln x d(\ln x) \Rightarrow y = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$f) y' = (\ln x + 1)$$

$$dy = (\ln x + 1) dx \Rightarrow \int dy = \int (\ln x + 1) dx \Rightarrow y = \int \ln x dx + \int dx$$

$$\int \ln x dx, \left[\begin{array}{ll} \ln x = u & dx = du \\ \frac{dx}{x} = du & x = v \end{array} \right]$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x$$

$$\Rightarrow y = x \ln x - x + x + C \Rightarrow y = x \ln x + C$$

$$g) y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow y = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$$

$$h) y' = x e^{-x^2}$$

$$dy = x e^{-x^2} dx \Rightarrow \int dy = \int x e^{-x^2} dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2)$$

$$y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$



Mo Tu We Th Fr Sa Su

Meme No. _____

Date / /

9 - حل معادلات دیفرانسیلی ذیل را در پایین که شرط اولیه داده شده را صدق کنید.

a) $y' = -2x e^{-x^2}$, $y|_{x=0} = 1$

$$dy = -2x e^{-x^2} dx \Rightarrow y = \int e^{-x^2} d(-x^2) \Rightarrow \boxed{y = e^{-x^2} + C}$$

$$y|_{x=0} = 1, \quad y = e^{-x^2} + C \Rightarrow 1 = e^{-0} + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{e^0} + C \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

$$y = e^{-x^2} + 0 \Rightarrow \boxed{y = e^{-x^2}}$$

b) $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y|_{x=0} = -1$

$$dy = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2)$$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \Rightarrow \underline{\underline{y = -\sqrt{1-x^2} + C}}$$

$$y|_{x=0} = -1, \quad -1 = -\sqrt{1-0^2} + C \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\sqrt{1-x^2}}$$

c) $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y|_{x=0} = 1$

$$dy = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \underline{\underline{y = \arctg x + C}}$$



Meme No. _____

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Date / /

$$y|_{x=0} = 1, \quad 1 = \operatorname{arctg} 0 + C \Rightarrow 1 = 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 1}$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{arctg} x + 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 + \operatorname{arctg} x}$$

$$d) \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y|_{x=\pi/2} = 2$$

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \underline{y = \operatorname{tg} x + C}$$

$$y|_{x=\pi/2} = 2, \quad 2 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} + C \Rightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow \boxed{C = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \operatorname{tg} x + 1}$$

$$e) \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}, \quad y|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2}} \Rightarrow \underline{y = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}} + C}$$

$$y|_{x=1} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} = \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{2}} + C \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + C \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}}$$

$$f) \quad xy' = 2y, \quad y|_{x=1} = 5$$

$$x \frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = 2 \ln x + \ln C \Rightarrow \underline{y = Cx^2}$$

$$y|_{x=1} = 5, \quad 5 = C \cdot 1 \Rightarrow \boxed{C = 5} \Rightarrow \boxed{y = 5x^2}$$